MATHEMATISCHE MODELLE ZUR ENTWICKLUNG UND VERNETZUNG VON MODULEN IN DER LEHRERBILDUNG

Laurent Bartholdi, Thorsten Groth, Stefan Halverscheid und Laila Samuel

Abstract

Der kulturelle Wert historischer, universitärer Modellsammlungen in der Mathematik ist vielfältig. Eine der Herausforderungen bei ihrer Einbindung in die Module aktueller Studiengänge besteht darin, dass viele Modellsammlungen aus einer bestimmten Epoche stammen, sich aktuelle Inhalte aber unabhängig davon weiterentwickeln. Das Projekt „KLEIN: Kulturell bildende Lernobjekte Entwickeln, Implementieren, Neu machen" versucht das Potential der Göttinger „Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente" für die Lehrerbildung zu nutzen, indem es an die Geschichte ihrer Nutzung in ihrer Blütezeit anknüpft. Deshalb werden für die Lehramtsstudierenden forschungsorientierte Prozesse von der Erschließung des historischen und fachwissenschaftlichen Kontexts der Modelle über ihre Reproduktion und Variation mit Hilfe des 3D-Drucks bis zur Implementation in schulische Unterrichtssituationen initiiert. Vorgestellt werden zwei Praxisbeispiele aus fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Modulen, die in dem Projekt entwickelt wurden.

1. Die Phase der Entwicklung der „Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente" am Mathematischen Institut Göttingen

Die Göttinger Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente enthält über 500 Objekte, darunter viele geometrische Modelle aus Gips, Holz, Karton, Fäden und Metall, sowie Rechenmaschinen und andere Rechenapparate, Zeichengeräte, kinematische und mechanische Modelle. Die ältesten Objekte der Sammlung sind Polyedern aus Karton, die aus dem Kabinett von Johann Friedrich von Uffenbach (1687–1769) stammen und deshalb ungefähr 1750 entstanden sein dürften. Die Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente ging 1881 aus der alten Göttinger Modell- und Maschinenkammer hervor und wurde nach und nach von Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) sowie später von Felix Klein (1849–1925) mit Hilfe beträchtlicher Zuschüsse von außen modernisiert. Sie wird bis heute ständig weiterentwickelt,[1] die meisten Objekte stammen aber aus dem Zeitraum von 1881 bis 1925.

1 Neueste Exponate sind ein Gömböc sowie ein maximaler Dodekaeder, der einem Icosaeder eingeschrieben ist.

Das Gebäude des Mathematischen Instituts wurde Ende der 1920er-Jahre gebaut und bescherte der Sammlung eine zentrale Rolle. Die meisten Schränke sind in der Art und Weise wie damals gruppiert. Die Sammlungsobjekte stammen größtenteils aus der Zeit zwischen 1870 und 1915 und vermitteln einen reichhaltigen Einblick in die Epoche, in der Göttingen international zu den bedeutendsten Zentren der Mathematik zählte.

Felix Klein wirkte in Erlangen, München, Leipzig und ab 1886 in Göttingen; er förderte die Anschauung in der mathematischen Lehre an Schule und Universität und entwickelte die Vision, Mathematik mit einer größeren Öffentlichkeit zu teilen. Klein war ein begabter Organisator. Durch ihn wurde die Göttinger Sammlung besonders um geodätische Instrumente und um Modelle zur darstellenden Geometrie erweitert.[2] Seinem Einfluss ist es wesentlich zuzuschreiben, dass in Deutschland viele Studenten, Dozenten und Professoren im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts mathematische Modelle anfertigten. An all den Orten, an denen er lehrte, entstanden mathematische Sammlungen. Zum Teil wurden die Objekte in Serie von gewerblichen Betrieben hergestellt,[3] sodass sich diese Sammlungen in ihren Bestandteilen ähneln.

Aus der Pädagogik gab es parallel Impulse zur Nutzung von Objekten beim Lehren und Lernen durch die Reformpädagogik. Ende des 19. Jahrhunderts wurden in den USA die Arbeiten von John Dewey, Stanley Hall, Johann Friedrich Herbart, Johann Heinrich Pestalozzi und Edward Lee Thorndike besonders einflussreich, in Europa jene von Maria Montessori (1870–1952), Rudolf Steiner (1861–1925) und Celestin Freinet (1896–1966). Dewey untersuchte in „How We Think“ und „The Influence of Darwin on Philosophy and Other Essays in Contemporary Thought“, wie sich das Wissen von Menschen prozessartig entwickelt. Er bezog damit Stellung gegen das Konzept der Wissensanhäufung (Dewey 1903) und stellte diesem, wie Konstruktivisten heute sagen würden, die eigene Konstruktion von Wissen entlang eigener Erfahrungen entgegen. Dabei suchte er nach „material of reflective inquiry not as ready made intellectual pablum to be accepted and swallowed as if it were something bought at a shop” (Dewey 1933, 257). Der Einfluss des Gegenständlichen zeigte sich allerdings in den meisten Ländern vor allem im Primarbereich, wenn auch international die reformpädagogischen Ansätze die Rolle des Experimentierens im Unterricht der höheren Schulstufen stärkten. Dies war der Fall in Frankreich (Gispert 2014, 234) und in Deutschland in den Jahren der Weimarer Republik (Schubring 2014, 250), bis sie dann im Nationalsozialismus trivialisiert werden sollten, beispielsweise durch die Reduktion des Geometrieunterrichts für Schüler_innen auf Objekte des Haushalts (Schubring 2014, 251).

Die Weltausstellung von Chicago 1893 nutzte Felix Klein dazu, seine Ideen der Sammlung international zu verbreiten. Emch (1893/94) berichtet davon, unterstreicht aber auch die Bedeutung derjenigen, die die Sammlungen an den jeweiligen Orten aufbauten. Als Beispiele nennt er Soleil in Paris, Magnus und Kummer in Berlin, Schwarz in Zürich, Zeuthen in Kopenhagen sowie Cayleigh und Henrici in London. An diesen Orten lässt sich beobachten, dass die Sammlungen noch ungefähr eine Generation nach ihren Gründern weiter ausgebaut wurden und sie dann faktisch auf diesem Stand verblieben. In der Mathematik gesellte sich die Entwicklung hinzu, dass sich seit den 1940er-Jahren das Bourbaki-Programm durchsetzte, in dem die Mathematik sehr formal und axiomatisch aufbereitet wurde. Für die Lehre propagierten seine Hauptvertreter, auf Skizzen und andere Veranschaulichungsmittel zu verzichten (Barbin & Menghini 2014); der axiomatische Ansatz hatte in den 1960er- und 1970er-Jahren als „New Math” selbst auf den Schulunterricht großen Einfluss. Vor diesem Hintergrund ist es wenig verwunderlich, dass die Rolle mathematischer Modelle für die Lehre in ihrer Bedeutung spürbar abnahm.

2 Vgl. auch Burmann, Krämer & Patterson 2001.

3 Vgl. Schilling 1911.

2. Die curriculare Herausforderung: Historische Sammlungsobjekte in aktuellen Inhalten verwenden

Das Fach Mathematik teilt die Entwicklungen vieler Wissenschaften, dass der Grad der Spezialisierungen in der Forschung immer weiter zunimmt. Wer Studiengänge entwirft und organisiert, steht vor der großen Herausforderung, genügend breite Grundlagen für eine wachsende Zahl von Spezialgebieten zu schaffen und gleichzeitig auch im Sinne der Forschungsorientierung in der Lehre Raum für Spezialisierungen im Laufe des Studiums zu lassen.

Historisch arbeitende Wissenschaften haben es im Umgang mit Sammlungsobjekten insofern leichter, als Quellenarbeit an und für sich den Kern des Faches ausmacht. Da in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Studiengängen nur noch an wenigen Universitäten ein wissenschaftshistorischer Schwerpunkt studiert werden kann, sind methodische Entwicklungen notwendig, wie Sammlungsobjekte einer bestimmten Epoche auf die aktuellen Entwicklungen bezogen werden können; denn die Curricula werden sich weiterhin recht unabhängig von bestehenden Sammlungen entwickeln. Die oben angesprochene Geschichte bestimmter Sammlungen zeigt ja auch, wie personenabhängig deren Entwicklung gewesen ist. Ebenso personenabhängig ist gerade an kleineren Fakultäten die Einbeziehung der Sammlungen.

Die Lehrerbildung betrifft es in besonderer Weise, dass sich die Themen der Curricula und der Sammlungen voneinander entkoppeln können, weil die Entwicklung von Schulcurricula von einzelnen Universitäten kaum beeinflusst wird. Hier sind Konzepte notwendig, die künftige Lehrer_innen langfristig in die Lage versetzen, Objekte in sich verändernde Curricula einzubauen.

3. Aktivitäten mit der „Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente“ in der aktivsten Phase ihrer Nutzung

Der Zusammenhang zur Forschung bestand durch Kleins „Erlanger Programm“, das er als Manifest 1872 formuliert (Klein 1974) und mit dem er aktuelle Entwicklungen in ein Programm gefasst hatte (Rowe 1989). Dieses Werk hat die Art geprägt, wie wir heute über Geometrie denken. Von 1890 bis 1911 entstanden in Göttingen mehr als 20 Dissertationen unter Kleins Betreuung, und viele mit Bezug zu Sammlungsobjekten. Der Einfluss der Göttinger Sammlung auf die Lehre zeigt sich an verschiedenen Lehrbüchern: „Anschauliche Geometrie“ von Hilbert und Cohn-Vossen (1932) als bekanntestes Beispiel. Die Sammlung enthält ebenfalls eine umfangreiche Diasammlung, die Friedrich Schilling ab 1898 für die Lehre aufbaute.

Die damalige Präsenz der Sammlung in der Mathematik wird deutlich in den Schriften der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek und der Bereichsbibliothek des Mathematischen Instituts. Skripte u.a. von Felix Klein und David Hilbert nehmen Bezug auf die Sammlung. Die Objekte der Sammlung sind in einer Datenbank erfasst und lassen sich im Internet einsehen.[4]

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts, auf dem Zenit der Nutzung der Sammlung in der Lehre, befand sich in der Nähe der Sammlungsschränke ein Zeichensaal, in dem die Studierenden sich mit bestehenden Modellen durch Skizzen auseinandersetzen und neue Modelle konzipieren konnten. Klein fragte: „Ist es nicht eine ebenso würdige Aufgabe der Mathematik, richtig zu zeichnen, wie die, richtig zu rechnen?” (Klein 1895, 540).

Zu Beginn der 1920er-Jahre schrieb Klein über die Anfänge der Modellsammlungen um 1800: „Wie heute, so war auch damals der Zweck des Modelles nicht die Schwäche der Anschauung auszugleichen, sondern eine lebendige deutliche Anschauung zu entwickeln, ein Ziel, das vor allem durch das Selbstanfertigen von Modellen am Besten erreicht wurde” (Klein 1978, 28). Nach Klein war der Einsatz von Modellen in der Mathematik also nicht nur deshalb erfolgreich, weil sie von Lehrenden bereitgestellt wurden. Das Anfertigen von Modellen vielmehr hielt er als Teil von Lehr-Lern-Prozessen für besonders vielversprechend.

4 Vgl. http://modellsammlung.uni-goettingen.de (01.10.2015).

Abb. 1: Teilnehmende Schüler bei der Erstellung von Tetraedern, um damit zu experimentieren, ob mit diesen eine Parkettierung des Raumes möglich ist.
Abb. 2: Schoenflies-Modelle in der „Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente“. Abb. 3: Mit 3D-Druck duplizierte Schoenflies-Modelle, mit denen sich dann die räumliche Parkettierung für einen größeren Bereich durchführen lässt. Dabei ist die Lage der Packung nicht offensichtlich.

4. Die methodische Chance zur Forschungsorientierung in der Lehre: Sammlungsobjekte zur „Sache selbst“ machen

In dem Zitat von Klein über die „Schwäche der Anschauung auszugleichen“ mag man Skepsis gegenüber bloßen Veranschaulichungsmitteln durchschimmern sehen, die auf eine nur passive Art und Weise konsumiert werden. Eine bloße Betrachtung der Sammlungsobjekte wäre in dieser Hinsicht nicht unproblematisch und müsste mit aktivierenden Formaten einhergehen.

In seinem oben schon erwähnten Erlanger Programm geht Klein wie folgt auf die Rolle von Modellen ein: „[In der Geometrie] gilt es, die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen und (was die mathematische Seite ist) die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell – mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein – ist für diese Geometrie nicht Mittel zum Zwecke, sondern die Sache selbst“ (Klein 1974, 42). Von Klein gestellte Arbeiten zum Zeichnen zeugen von einer Produktorientierung, nämlich einer individuell erstellten Mappe mit einer Vielzahl perspektivischer Zeichnungen von Sammlungsobjekten. Die Nutzungsgeschichte der Sammlung zeugt insofern von einer Forschungsorientierung in der Lehre, als einzelne Objekte als konkrete Forschungsobjekte aufgefasst werden. Sie bieten in ihrer Einzigartigkeit sowohl eine individuelle Forschungsaufgabe als auch den Anlass für eine Kontextualisierung, die beispielsweise klärt, inwiefern die Objekte spezielle oder verallgemeinerbare Phänomene zeigen.

In der Aufgabenorientierung des naturwissenschaftlich-mathematischen Studiums kann die Nutzungsgeschichte der Sammlung eine Chance für die Forschungsorientierung bedeuten, indem Aufgaben eine produktorientierte Komponente erhalten – sei es in der Auseinandersetzung mit oder in der Konstruktion von Modellen.

5. Fachdidaktisches Praxisbeispiel zur curricularen Vernetzung: mathematische Exponate jahrgangsstufenübergreifend einsetzen

Der curricularen Herausforderung, Exponate aus zurückliegenden Epochen für heutige Curricula einzusetzen, wird in diesem Seminarkonzept so begegnet: Studierende des Lehramts erhalten die fachdidaktische Aufgabe, zu einem oder wenigen Modellen Unterricht von der dritten bis zur zwölften Jahrgangsstufe zu planen und mit Gruppen verschiedener Altersstufen durchzuführen. Dies knüpft an die Idee einer spiralförmigen Organisation des Curriculums an, wie sie Jerome Bruner formulierte: „any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development" (Bruner 1960, 33). Es wäre nun ein Missverständnis, daraus zu schließen, für alle Jahrgangsstufen könne der gleiche Unterricht gemacht werden. Vielmehr geht es bei der intellektuell redlichen Form um die jahrgangsstufenadäquate Umgestaltung und Anpassung mathematischer Phänomene auf verschiedenen Stufen der Abstraktion.

Für dieses Seminar wurden sowohl Gegenstände aus der Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente als auch Exponate der Wanderausstellung „Mathematik zum Anfassen" des Mathematikums Gießen e.V. zur Grundlage genommen. Alle Teilnehmenden des Seminars erhielten je ein Objekt bzw. eine Gruppe von Objekten mit der Aufgabe, daraus ein Thema und Workshops für Klasse 3 bis zum Abitur zu entwickeln, vorzubereiten und schließlich auch vor kleinen Gruppen von 6 bis 15 Schüler_innen zu präsentieren. In dem Praxisteil haben 27 Studierende 58 Workshops für insgesamt ca. 650 Schüler_innen angeboten.

Ein Beispiel für die Auseinandersetzungen mit einem Objekt aus der Sammlung waren die Parkettierungen von Schoenflies (1891), die er in seiner Habilitation in Berlin und ab 1891 als Lehrstuhlinhaber für Angewandte Mathematik in Göttingen untersucht hat. Diese Objekte sind Lösungen für die Fragestellung, welche dreidimensionalen Objekte es gibt, mit deren Kopien man den Raum lückenlos ausfüllen kann. Bezogen auf die Abstraktionsebene sind dies Fragestellungen, wie sie im Geometrieunterricht der Grundschule angesprochen werden. Im Dreidimensionalen kann man sich der Fragestellung durch erste Beispiele nähern. Sofort leuchtet es ein, dass Würfel die Eigenschaft besitzen, den Raum auszufüllen, und auch Quader funktionieren offenbar. Die Nutzung von Spat, also eines Quaders mit parallel gekippten Quadern, erfordert schon allgemeinere Überlegungen.

Jenseits dieser Beispiele ist die Fragestellung häufig nicht mehr so offensichtlich zu beantworten. Beispielsweise stellt es eine interessante Aufgabe dar, zu beweisen oder zu widerlegen, ob Tetraeder gleicher Bauart den Raum ausfüllen. Abb. 1 zeigt Schüler der Jahrgangsstufe 8 bei der Herstellung von Tetraedern, um dieser Frage nachzugehen. Die Produktion vieler Schoenflies-Modelle macht es dann möglich, den Versuch zu unternehmen, einen größeren Raumbereich mit den Modellen als Packungen auszufüllen.

Hier bietet sich eine erste Gelegenheit, die Möglichkeiten des 3D-Drucks zu nutzen: Viele Objekte gleicher Bauart lassen sich mit den Druckern präzise herstellen. In der Freinet-Pädagogik werden Objekte gleicher Bauart eingesetzt, etwa schon bei Kindern, um sie Mathematik entdecken zu lassen (Hülswitt 2004). Die Schoenflies-Modelle können reproduziert von mehreren Bearbeitenden gleichzeitig zu Parkettierungen genutzt werden. Die Nutzung eines Exponats birgt nämlich nicht zuletzt zeitökonomische Probleme: Nur wenige können es in einer Lehrsituation wirklich anfassen. Auch deshalb werden diese Objekte oft lediglich präsentiert – neben dem Zeitverlust ist vielfach auch das Risiko einer Beschädigung von historisch wertvollen Modellen ein Problem. Die Reproduktion kostet viel Zeit und Mühe, kann aber die Auseinandersetzung dadurch intensivieren, dass viele mit dem Material eigenständig arbeiten können.

Der jahrgangsstufenübergreifende Ansatz geht über die an und für sich schon interessante Frage hinaus, ob ein bestimmter Lerngegenstand für verschiedene Stufen adäquat verwendet werden kann. Durch die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Voraussetzungen zu einer ähnlichen „fundamentalen Idee", die man im Sinne des obigen Zitats von Bruner dann intellektuell redlich für verschiedene Stufen operationalisiert, bereiten sich Lehrende inhaltlich auf Differenzierungsmaßnahmen im Unterricht vor. Diese erlauben es dann, auf große Unterschiede in der Leistungsfähigkeit oder beim fachlichen Vorwissen zu reagieren, indem man sich beispielsweise für den Unterricht in einer siebten Klasse auch Problemstellungen vornimmt, die eigentlich für zwei Klassenstufen darunter oder zwei Klassenstufen darüber konzipiert worden sind. Wenn dies am selben Exponat durchgeführt wird, ergibt sich daraus der besondere Erkenntniswert, Bearbeitungen von Problemstellungen auf verschiedenen Schwierigkeitsniveaus durch das gemeinsam genutzte Material wieder für die gemeinsame Lerngruppe zu teilen.

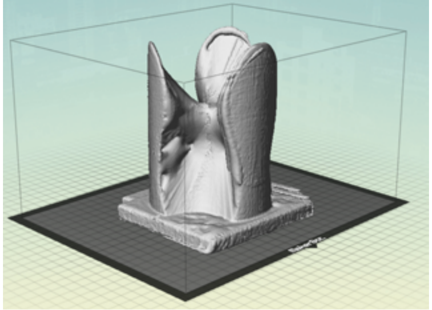

Abb. 5: Digitales Bild des eingescannten Exponats. Abb. 6: 3D-Druck von Reproduktionen und Variationen von Flächen dritter Ordnung.

Abb. 4: Schrank in der Göttinger Sammlung mit Gipsmodellen zu Flächen dritter Ordnung.

6. Fachwissenschaftliches Praxisbeispiel zur Forschungsorientierung in der Lehre: Sammlungsobjekte zur „Sache selbst" machen

Das Konzept von Felix Klein, dass das Modell die Sache selbst sei, wird in diesem Seminarkonzept so verstanden: Studierende erhalten ein Objekt aus der „Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente" zu einem bestimmten Thema. So erhält jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer ein individuell zugewiesenes Sammlungsobjekt, und damit auch eine individuell vorgegebene Forschungsaufgabe. Das Modell, „die Sache selbst", wird dann unter übergeordneten Fragestellungen untersucht. Die Verwandtschaft, wenn nicht die Übereinstimmung der Aufgabenstellungen sorgt dafür, dass sich letztlich die Ergebnisse wieder leicht kontextualisieren lassen.

In dem fachwissenschaftlichen Seminar wurden die Objekte dieses Ausstellungsschranks behandelt:

Dabei handelt es sich um Modelle von „Flächen dritter Ordnung", die in der Blütezeit der Sammlung klassifiziert wurden (Rodenberg 1878), nachdem Cayley (Cayley 1849) und Salmon (Salmon 1849) herausgefunden hatten, dass jede glatte Fläche dritter Ordnung genau 27 Geraden enthält. Ein Beispiel für eine solche glatte Fläche ist die „Cleb'sche Diagonalfläche", ihre Abbildung befindet sich ganz oben links im oben abgebildeten Schrank. In geschickt gewählten Koordinaten hat sie die folgende Gleichung:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 1 = (x + y + z + 1)^3$$

Man nennt die Gleichung von dritter Ordnung, weil nach Ausmultiplizieren in jedem Summanden Produkte von höchstens drei Variablen vorkommen.

In geeigneten Koordinaten kann sie angemessen dargestellt werden. In einem Sitzungsbericht der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Göttingen vom 3. August 1872 heißt es: „Hr. Clebsch legte zwei Modelle vor, welche Hr. stud. Weiler hierselbst dargestellt hatte, und welche sich auf eine besondere Classe von Flächen dritter Ordnung beziehen. […] Das eine der beiden Modelle stellte die 27 Geraden dieser Fläche dar, das andere die Fläche selbst, ein Gypsmodell, auf welchem die 27 Geraden gezeichnet waren."

Jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer bekam nun folgende Aufgabe:

1. Einscannen eines der Modelle; dies ergibt etwa 70.000 Punkte, die die Fläche im Raum beschreiben,
2. Approximative Bestimmung einer Gleichung dritter Ordnung, die die eingescannte Fläche beschreibt,
3. Nachdruck der Fläche und einiger Variationen,
4. Vergleich mit Originalmodell.

Der Vergleich der Reproduktion mit dem Original verdeutlicht, welche Kompromisse die Macher der ursprünglichen Modelle eingegangen sind. Die Unterschiede zeigen auch einige besondere Schwierigkeiten des Modellierens exakter Formeln. So unterscheiden sich ohne gezielte Nachbearbeitung Nachbau und Original deutlich in der Nähe von sogenannten Singularitäten, also Stellen, an denen das Modell nicht glatt ist, sondern Spitzen oder Kanten aufweist. Diese Singularitäten nehmen im Studium solcher Flächen einen hohen Stellenwert ein, der durch den Modellierungsvorgang noch einmal besonders deutlich wird.

Die Reproduktion der Objekte gibt Studierenden ein Gefühl davon, wie Studierende in der Zeit von Klein und gar Clebsch arbeiteten, um selbst Mathematik zu „produzieren“. Sie sind so direkt im Kontakt mit Verfahren, denen Forscher gefolgt sind. Für die Dozenten gibt es ebenfalls einen großen Gewinn: Sie erhalten so experimentell erworbene Daten, die ihnen einen Blick dafür bescheren, wie die Mathematiker im 19. Jahrhundert arbeiteten. Beispielsweise lassen sich aus den systematischen Änderungen zwischen den Gips-Modellen, für die man durch das Einscannen mathematische Formeln findet, Hinweise darauf entnehmen, wie die Modelle damals gebaut wurden. Dies stellt bis heute noch ein großes Rätsel dar.

7. Nachhaltige Implementierung der Göttinger „Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente“ in die lehrerbildenden Bachelor- und Master-Studiengänge

Die Praxisbeispiele aus den Abschnitten 5 und 6 sind Prototypen für ein fachdidaktisches und ein fachwissenschaftliches Master-Seminar der Lehrerbildung, in denen die Auseinandersetzung mit Modellen in den Modulbeschreibungen – im Fall der Fachdidaktik in einem Pflichtmodul und im Fall der Fachwissenschaften als Wahlpflichtmodul – festgelegt ist. Dabei wird ganz bewusst nicht vorgeschrieben, das gesamte Seminar auf die Sammlung zu beziehen. Vielmehr geht es um die Verbindung der Sammlungen mit aktuellen fachdidaktischen Konzepten und fachwissenschaftlichen Themen.

Vorbereitet wird dies durch ein Pflichtmodul mit fachdidaktischen und fachwissenschaftlichen Anteilen im Bachelor, bei denen fachdidaktische Grundlagen am Beispiel der Exponate und geeigneter Techniken entwickelt und Fragestellungen zu für den Schulunterricht relevanten, elementarmathematischen Fragen bezogen auf Objekte der Sammlung erarbeitet werden. Mit dem Angebot eines Zertifikats zu Sammlungen beim Lehren und Lernen von Mathematik kann dies abgerundet werden.

LITERATUR

BARBIN, E.; MENGHINI, M. 2014. History of teaching geometry. In: KARP, A.; SCHUBRING, G. (Hrsg.). *Handbook on the History of Mathematics Education.* New York: Springer, 473–492.

BRUNER, J. 1960. *The process of education.* Cambridge: Harvard University Press.

BRUNER, J. S. 1966. *Toward a theory of instruction.* Cambridge: Harvard University Press.

BURMANN, H.-W., KRÄMER, S., PATTERSON, S. J. 2001. Die Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente des Mathematischen Instituts. In: HOFFMANN, D., MAACK-RHEINLÄNDER, K. (Hrsg.). *„Ganz für das Studium angelegt": Die Museen, Sammlungen und Gärten der Universität Göttingen.* Göttingen: Wallstein-Verlag, 175–181. http://www.math.uni-goettingen.de/historisches/modelle.html (30.11.2015).

CAYLEY, A. 1849. On the triple tangent planes of surfaces of the third order. *The Cambridge and Dublin mathematical journal* 4, 118–132.

DEWEY, J. 1903. The psychological and the logical in teaching geometry. *Educational Review* 25: 387–399.

DEWEY, J. 1933. *How we think.* Boston (D.C.): Heath.

EMCH, A. 1893/94. Mathematical models. *Transactions of the Annual Meetings of the Kansas Academy of Science* 14: 90–93.

FISCHER, G. (Hrsg.) 1986. *Mathematische Modelle aus den Sammlungen von Universitäten und Museen.* Kommentarband. Braunschweig: Vieweg.

GISPERT, H. 2014. Mathematics Education in France: 1800–1900. History of teaching geometry. In: KARP, A.; SCHUBRING, G. (Hrsg.). *Handbook on the History of Mathematics Education.* New York: Springer, 229–240.

HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S. 1932. *Anschauliche Geometrie.* Berlin: Springer.

HÜLSWITT, K. L. 2004. Verstehen heißt Erfinden: Eigenproduktionen mit gleichem Material in großer Menge. In: *Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern.* Frankfurt am Main: Grundschulverband – Arbeitskreis Grundschule, 207–218.

KLEIN, F. 1895. Über die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen. Antrittsrede Universität Leipzig am 25.10.1880. *Zeitschrift für den Mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht* 26: 540.

KLEIN, F. 1974. *Das Erlanger Programm.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig.

KLEIN, F. 1978. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer.

RODENBERG, C. 1878. Zur Classification der Flächen dritter Ordnung. *Mathematische Annalen* 14, 1: 46–110.

ROWE, D. E. 1989. Klein, Lie, and the Geometric Background of the Erlangen Program. In: ROWE, D. E.; MCCLEARY, J. (Hrsg.). *The History of Modern Mathematics: Ideas and their Reception.* Bd. 1. Boston: Academic Press, 209–273.

SALMON, F. 1849. On the triple tangent planes to a surface of the third order. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 4, 252–260.

SATTELBACHER, A. 2013. Geordnete Verhältnisse. Mathematische Anschauungsmodelle im frühen 20. Jahrhundert. *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* 36, 4 (Schwerpunkt „Bildtatsachen"): 294–312.

SCHILLLING, M. 1911. *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht 1907.* Leipzig: Verlagsbuchhandlung Martin Schilling. 7. Aufl.

SCHOENFLIES, A. 1891. *Krystallsysteme und Krystallstruktur.* Leipzig: BG Teubner.

SCHUBRINK, G. 2014. *Handbook on the History of Mathematics Education.* New York: Springer.

KONTAKT

Prof. Dr. Laurent Bartholdi
Georg-August-Universität Göttingen
Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen
laurent.batholdi(at)mathematik.uni-goettingen.de
http://modellsammlung.uni-goettingen.de

Thorsten Groth
Georg-August-Universität Göttingen
Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen
thorsten.groth(at)mathematik.uni-goettingen.de

Prof. Dr. Stefan Halverscheid
Georg-August-Universität Göttingen
Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3–5, 37073 Göttingen
stefan.halverscheid(at)mathematik.uni-goettingen.de

Laila Samuel
Mathematikum Gießen
Liebigstraße 8, 35390 Gießen
laila.samuel(at)mathematikum.de